

## Péndulo caótico

Muchas fueron las novedades introducidas en la física del siglo xx. Entre las más divulgadas destaca la teoría del caos. Algunas expresiones han calado en el léxico común; verbigracia, el “efecto mariposa”, que acuñó E. N. Lorenz en 1963. Ya no hace falta ser un experto para comprender, de forma intuitiva, que ligeras perturbaciones iniciales en un sistema pueden verse amplificadas hasta tornar a éste en impredecible.

Al experimentador suele molestarle la aparición de fenómenos no deterministas. Por ello, cuando en un dispositivo las respuestas obtenidas son aleatorias y no extrapolables a partir de las condiciones iniciales, lo mejor es volver a empezar: nuevo diseño experimental y nuevo montaje.

En ocasiones, empero, es el propio resultado no predecible el que estimula al investigador. Constituyen buena prueba de ello los artefactos mecánicos que evolucionan en el tiempo sin que acertemos a anticipar cuál será el movimiento siguiente. El reto consiste en crear un sistema muy simple que, abandonado a su propio funcionamiento, termine por resultar impredecible. La construcción de péndulos abre un vasto campo de actividad que nos permite disfrutar de las sutilidades del caos determinista.

Un péndulo consiste en una masa densa y pesada que oscila suspendida por un hilo o una varilla. Construido así, la predictibilidad es total: efectúa un movimiento armónico simple, cuyo período depende de la longitud del péndulo y de la intensidad del campo gravitatorio en el que se halla sumido. Esa regularidad pendular se ha utilizado para gobernar con excelentes resultados el movimiento de relojes. Sin embargo, se trata de una regularidad más aparente que real, puesto que el período del péndulo depende también de la amplitud de la oscilación [véase “Péndulo gravimétrico”, INVESTIGACIÓN Y CIENCIA, julio de 2005].

Aprovechando la propiedad anterior, podemos construir sistemas compuestos por dos o más péndulos acoplados mediante hilos o muelles. Si la amplitud de la oscilación adquiere cierto valor, la evolución del conjunto escapará a la predicción de la posición relativa de las masas en un instante concreto. Otra opción de interés consiste en utilizar un péndulo amortiguado por una pequeña masa opuesta a la principal; pensemos en una varilla con dos pesos y un eje de oscilación entre éstos. Se crea un sistema pendular más lento con un período de oscilación mayor y un movimiento más elegante. En ese caso, sin embargo, nos alejamos notablemente del péndulo matemático.

El análisis del sistema debe contemplar el momento de inercia de las masas en movimiento. El cálculo del período entraña aquí mayor complejidad. Utilizaremos

la ecuación del movimiento para un péndulo físico:  $\ddot{\theta} = -mgb/l (\text{sen } \theta)$ , donde  $\theta$  representa el ángulo respecto a la vertical,  $m$  la masa,  $g$  la aceleración de la gravedad,  $b$  la distancia del centro de giro al centro de gravedad e  $l$  el momento de inercia del sólido alrededor del eje de giro. Empezarán a ser perceptibles los efectos de la fricción en el punto de oscilación y otras perturbaciones.

Podemos también acoplar péndulos amortiguados. Mediante el ajuste de la posición de las masas y el valor de éstas, la ergodicidad —como diría un estadístico—, o la aleatoriedad, está garantizada.

Otra disposición interesante pasa por dar una máxima libertad de movimiento a uno de los péndulos. Viene en nuestra ayuda un elemento con numerosas aplicaciones: la unión o junta cardan. Se utilizaba ya en la antigua China; en Europa la dio a conocer Girolamo Cardano (1501-1576). Consta de un arreglo de dos ejes perpendiculares y anillas u horquillas, capaz de tomar todas las orientaciones en el espacio. En nuestro caso, añadiremos otro eje, el de la oscilación del péndulo. De esa forma, el péndulo, suspendido en su centro, podrá apuntar en cualquier dirección y, además, oscilar con total libertad.

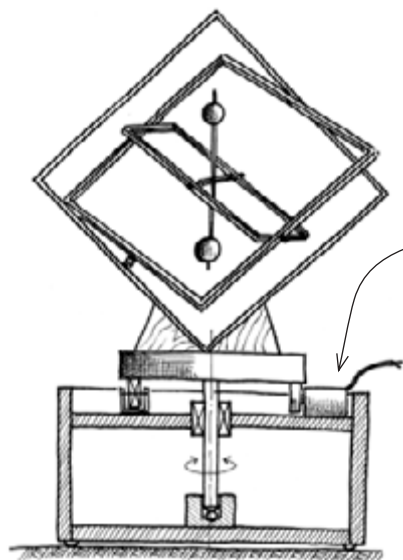
Para su construcción tendremos presente que el peso de las anillas sea despreciable respecto del péndulo situado en su interior. Por ello, se aconseja el uso de materiales de baja densidad o la reducción máxima de las secciones. En general, resulta indiferente utilizar las anillas circulares o poligonales; optaremos por uno u otro diseño en función de nuestra destreza técnica. Describiremos aquí la opción cuadrada, de mayor sencillez. Para su materialización, nos proveeremos en un comercio de modelismo de finos listones de madera dura (haya, por ejemplo), que cortaremos y mecanizaremos con precisión.

Antes de encolar bien los listones, practicaremos los taladros donde situaremos luego ejes y cojinetes de giro. La solución que proponemos produce una ligera fricción. Sin embargo, puede mejorarse mediante la combinación ingeniosa de toda la gama de accesorios del aeromodelismo; se consigue así el ajuste preciso de todos los puntos de giro.

Para la masa pendular emplearemos una varilla rosca; fijaremos en ella los pesos de plomo esféricos que se utilizan en la pesca deportiva. En mi dispositivo, los pesos respectivos son de 90 y 60 gramos, aunque estos valores pueden aumentarse si ello se acompaña de una mayor rigidez estructural.

Realizadas esas manipulaciones montaremos el conjunto, que deberá estar bien lubricado y exento de huelgos en sus puntos de giro.

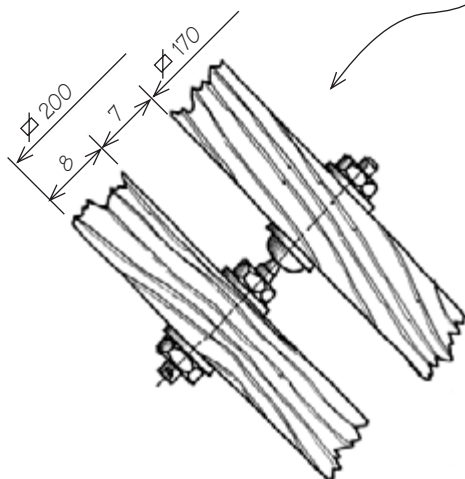
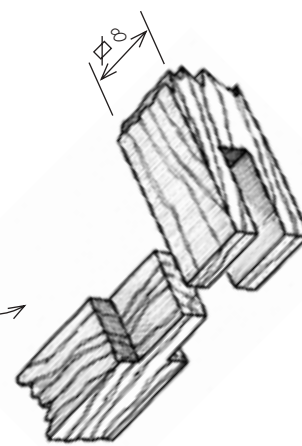
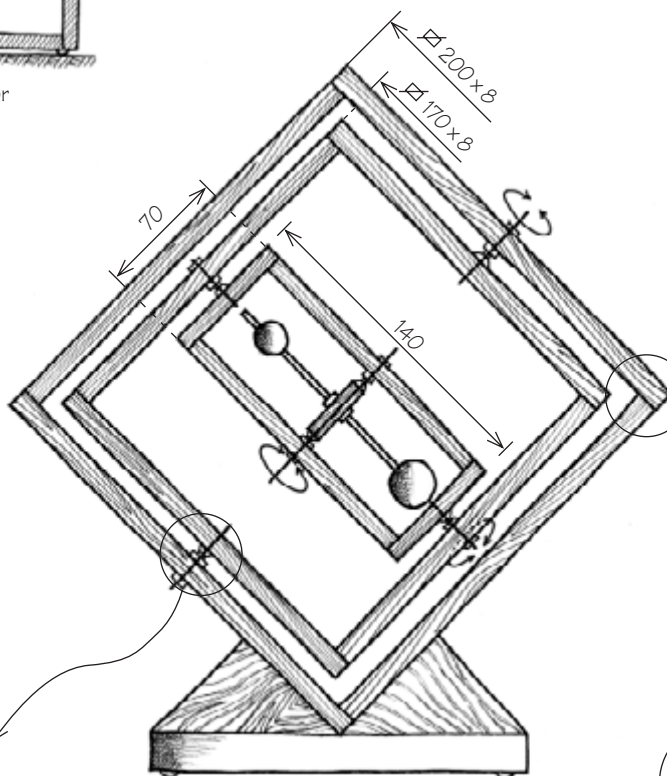
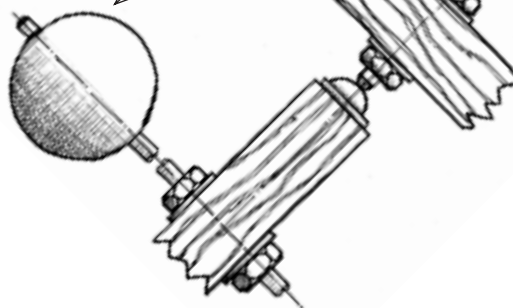
Antes de fijarlo en el soporte a 45°, realizaremos algunas pruebas. Tomemos el artefacto y coloquémoslo



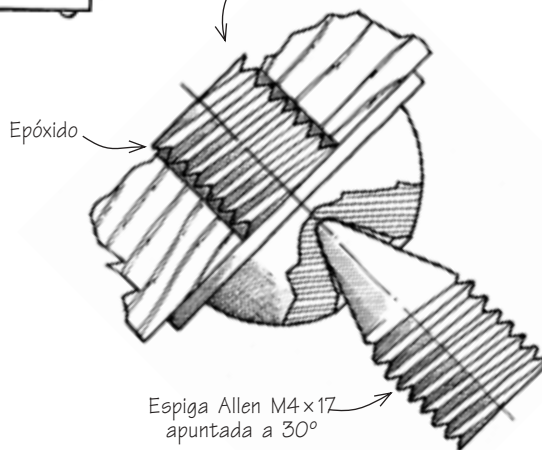
Soporte con motor

Motor cc 0/12 v  
0/30 rpm

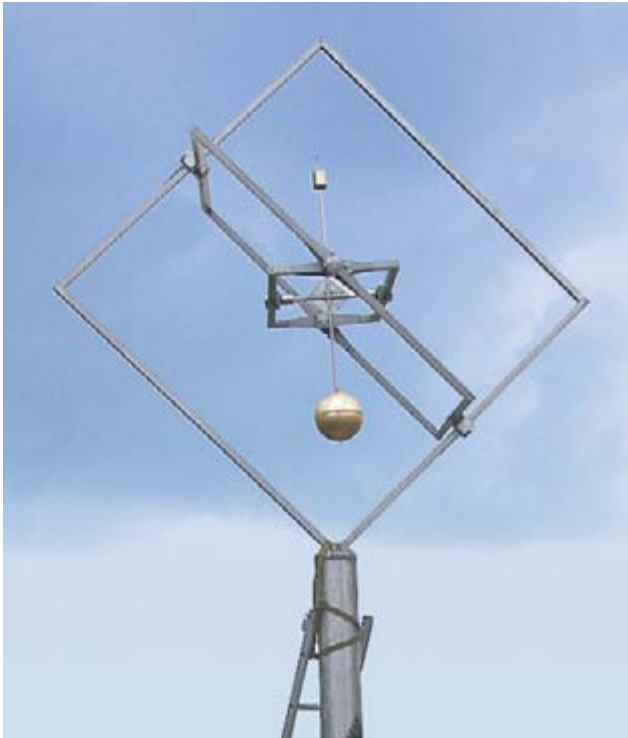
Esfera de plomo 60 o 90 g



Tornillo de latón  
cabeza esférica M4



Espiga Allen M4x17  
apuntada a 30°



vertical, reposando sobre un lateral. Impulsemos el péndulo. Comprobaremos que éste oscila como cualquier otro. Impulsemos ahora la anilla móvil exterior; si la construcción es correcta, girará quedando el péndulo casi inmóvil. Probemos ahora con la anilla exterior en posición horizontal; repitamos las pruebas anteriores. Tampoco observamos caos.

En cambio, una vez montado a  $45^\circ$ , el comportamiento cambia de una forma radical. Si aportamos energía al sistema por la vía de impulsar cualquier anilla, comprobaremos que las esferas de plomo pasan por diversas

posiciones en el espacio. ¿Por qué? Con la colaboración de Miquel Noguera, de la Universidad Politécnica de Cataluña, hemos analizado el sistema. Su extraño comportamiento responde a un fenómeno de indecibilidad. Expliquémonos.

Cuando el péndulo se mueve, intenta trazar una órbita que mantenga estable su momento angular. Gracias a la redundancia del mecanismo (recordemos que a los dos ejes de la suspensión cardan se suma el de oscilación), el péndulo puede seguir órbitas distintas, ya que le es posible girar sobre más de un eje. Por tanto, en según

## Caos o no caos

**E**ntenderemos por caótico aquel sistema dotado de soluciones que en su inicio pueden estar infinitamente próximas, pero al cabo de poco tiempo dan comportamientos muy dispares. Ello imposibilita realizar predicciones a largo plazo; además, dada una configuración del sistema, no hay forma de saber cómo se ha llegado hasta ella.

Se distingue ese tipo de comportamiento por la diversidad de soluciones que ofrece. En algunos casos, podemos incluso asegurar que existen las condiciones iniciales para cualquier comportamiento que seamos capaces de imaginar.

Podemos abordar el estudio de un sistema caótico desde una doble óptica. La primera consiste en encontrar un modelo matemático potente que describa el sistema: en nuestro caso, las ecuaciones del péndulo construido. Luego, mediante un análisis cualitativo, se demuestra la existencia de elementos generadores de caos determinista: por ejemplo,

atractores extraños u órbitas homoclínicas. Los resultados de las ecuaciones de Edward Lorenz (publicados en 1963) sobre un sencillo modelo de evolución de un fluido constituyen un claro exponente de ese tipo de enfoque.

La segunda aproximación consiste en tomar medidas, en lo posible precisas, del movimiento del sistema a lo largo del tiempo. En nuestro caso podrían realizarse fotografías bajo una luz estroboscópica de alta frecuencia y medir luego la evolución de alguno de los ángulos del péndulo. A continuación, se calculan ciertos parámetros que caracterizan la existencia de caos en una serie temporal: por ejemplo, los exponentes de Lyapunov o la entropía.

Para ello pueden utilizarse los programas TISEAN (<http://www.mpi-pks-dresden.mpg.de/~tisean/>). Esa es la técnica que se utiliza para la detección de caos en cardiogramas o encefalogramas.



Péndulo caótico de 2 metros, instalado en el Jardín de las Percepciones del Parque de Vallparadís, Tarrasa.

qué posiciones el péndulo “escoge”, animado por sutiles perturbaciones, uno u otro eje de giro.

Según la teoría del caos determinista, una de las causas de la diversidad de comportamientos de un sistema dinámico viene expresada por la existencia de atractores extraños. Los atractores son formas geométricas que caracterizan el comportamiento a largo plazo en el espacio de configuraciones. A grandes rasgos, un atractor es a lo que tiende, o a lo que es atraído, el comportamiento de un sistema (se empieza donde se quiera, el sistema se dirige hacia esa región). El tipo más simple de atractor es un punto fijo. Es el que opera en un péndulo simple con rozamiento: el péndulo llega siempre a la misma posición de reposo, independientemente del modo en que empezó a oscilar. Se trata de un atractor predecible, pues su comportamiento puede pronosticarse con exactitud.

Los atractores caóticos, o extraños, en cambio, corresponden a movimientos impredecibles; adquieren una forma geométrica más compleja. Observado a gran escala, un atractor caótico constituye una superficie que se pliega sobre sí misma. El carácter extraño de su estructura matemática —que guarda cierta semejanza con la de un fractal— produce el efecto caótico mencionado. Es decir, a pesar de que dos soluciones tengan un inicio muy próximo, al ser atraídas por un atractor caótico caen rápidamente en zonas distintas, dando comportamientos dispares. (El lector que desee ahondar en este tema puede empezar con el conocido atractor de Lorenz.)

Mediante el ensayo de modelos de tamaño distinto, el experimentador descubre que un incremento del tamaño



produce un movimiento más suave y, lógicamente, de mayor duración. Ello es debido a que la fricción y el peso de las anillas no crecen tan rápido como el período del péndulo y su inercia. Nos hallamos ante un típico fenómeno no escalar, de interés para la construcción de péndulos, que nos obliga a descartar tamaños por debajo del decímetro y optar por tamaños mayores.

En ese sentido, el modelo propuesto puede ampliarse sin demasiadas modificaciones hasta 500 milímetros o más, correspondiendo esta cifra al tamaño del conjunto, es decir, a la medida máxima de la anilla exterior. Pero a partir de ciertas dimensiones, deberán reconsiderarse los ejes de giro mediante la incorporación de rodamientos de bolas; también la estructura de las anillas, que deberá ser más sólida. Al alcanzar dimensiones métricas, el período del péndulo llega a varios segundos; el fenómeno adquiere una gran espectacularidad.

Mediante una construcción atenta, la fricción puede reducirse a valores mínimos; el par necesario para vencer la resistencia de los ejes será inferior a 1 N/m.

Para motorizar el movimiento del péndulo, basta colocar éste sobre una base rotatoria que incorpore un motor de velocidad regulable (por ejemplo, de 0 a 30 revoluciones por minuto) y de doble sentido de giro. Por ejemplo, un pequeño motor a pilas con reductor. El accionamiento debe ser intermitente; la maniobra irá a cargo de un temporizador cíclico, es decir, uno en que podamos programar un tiempo de funcionamiento y uno de parada, o, mejor aún, fases de giro en sentido horario y antihorario con paradas intermedias.

Las velocidades y frecuencias de accionamiento deberán sincronizarse con el período fundamental del péndulo, que se ajustará mediante el desplazamiento de las masas de plomo. Cuanto mayor sea éste, menores serán la velocidad y la cadencia.